INSA INSTITUT NATIONAL DES SCIENCES APPLIQUÉES RENNES

Année universitaire 2020-2021
4ème année GM

Examen MERN

Devoir Ecrit

Durée: 2h

12 Mai 2021

Calculatrices authorisées.
Les notes personnelles sont permises (cours, TD, exercices, etc.) ainsi que les documents imprimés distribués dans le cadre de ce cours et les notes en ligne sur Moodle.

Exercice 1. Résolution du problème d'advection 1D
On considère le système

$$\begin{cases} \dfrac{\partial u}{\partial t}(x,t) + v(t)\dfrac{\partial u}{\partial x}(x,t) = f(u,t) & t > 0,\ 0 \leq x \leq L \\ u(0,t) = g(t) & t > 0 \\ u(x,0) = u_0(x) & 0 \leq x \leq L \end{cases} \tag{1}$$

où L est une constante fixée.

1. Résoudre le problème pour $f(u,t) = 0$, $v(t) = \frac{1}{\sqrt{t+1}}$, $g(t) = t^2$ et $u_0(x) = \cos(x)$.

2. On considère maintenant le cas où $v(t) = v$, constante strictement positive et $f(u,t) = -u(x,t) + \sin(t)$.
   2.1. Déterminez les charactéristiques.
   2.2. Montrez que u le long d'une caractéristique $x(t)$ satisfait l'EDO:

$$\frac{d}{dt}u(x(t),t) + u(x(t),t) = sin(t) \tag{2}$$

   2.3. Montrez que les solutions générale de l'EDO (2) s'écrivent

$$y(t) = \frac{1}{2}\left(\sin(t) - \cos(t)\right) + \lambda e^{-t} \tag{3}$$

avec λ une constante.
   2.4. Trouver la solution du problème, pour $g(t) = \sin(t)$ et $u_0(x) = \sqrt{x}$.

Exercice 2 - Différences Finies et Crank-Nicolson pour le problème de Poisson.

On s'intéresse au problème

$$\frac{\partial u}{\partial t}(x,t) - \nu\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}(x,t) = f(x,t) \tag{4}$$

pour $x \in [0,L]$ et $t \in [0,T]$. Le problème est couplé à des conditions de Dirichlet homogènes et une condition initiale $u_0(x)$:

$$\begin{cases} u(0,t) = u(L,t) = 0 \\ u(x,0) = u_0(x) \end{cases} \tag{5}$$

L'intervalle $[0, L]$ est discrétisé avec $N_x + 1$ points $(x_i)_{i=1,\dots,N_x+1}$ répartis uniformément avec un pas d'espace $\Delta x = L/N_x$ (constant) tel que $x_i = (i-1)\Delta x$. Identiquement, l'intervalle $[0, T]$ est discrétisé avec $N_t + 1$ points $(t^n)_{n=1,\dots,N_t+1}$ répartis uniformément avec un pas de temps $\Delta t = T/N_t$ (constant) tel que $t^n = (n-1)\Delta t$. On dénotera u_i^n la solution approchée au noeud x_i et au temps t^n.

1. Donnez le schéma différences finies centré en espace, avec discrétisation temporelle de Crank-Nicolson.

2. On va dans un premier temps s'intéresser à la consistance. On considérera la solution u suffisamment régulière pour permettre l'analyse (à savoir $u(x,t)$ au moins C^4 pour x et C^3 pour t). On définie l'erreur de consistance par

$$\begin{aligned}
\mathscr{R}(u, x, t, \Delta x, \Delta t) &= \mathscr{R}_t(u, x, t, \Delta t) + \mathscr{R}_s(u, x, t, \Delta x) + \mathscr{R}_s(u, x, t + \Delta t, \Delta x) \\
\mathscr{R}_t(u, x, t, \Delta t) &= \frac{u(x, t+\Delta t) - u(x,t)}{\Delta t} - \frac{1}{2}\left(\frac{\partial u}{\partial t}(x, t+\Delta t) + \frac{\partial u}{\partial t}u(x,t)\right) \\
\mathscr{R}_s(u, x, t, \Delta x) &= \frac{\nu}{2}\left(\frac{u(x+\Delta x, t) + u(x-\Delta x, t) - 2u(x,t)}{\Delta x^2} - \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}(x,t)\right)
\end{aligned} \tag{6}$$

2.1. Trouvez p et une constante C_1 (indépendante de Δx et Δt), tels que

$$|\mathscr{R}_s(u, x, t, \Delta x) + \mathscr{R}_s(u, x, t+\Delta t, \Delta x)| \leq C_1 \Delta x^p \tag{7}$$

2.2. Trouvez q et une constante C_2 (indépendante de Δx et Δt), tels que

$$|\mathscr{R}_t(u, x, t, \Delta t)| \leq C_2 \Delta t^q \tag{8}$$

2.3. Déduisez en une majoration de $|\mathscr{R}(u, x, t, \Delta x, \Delta t)|$ et conclure sur la consistance du schéma.

3. En considérant le problème sans second membre sur domaine infinie, donnez la condition de stabilité au sens de Von-Neumann du schéma numérique mis en place.