# Examen MNNL

## Devoir Ecrit

Durée: 2h

14 Mai 2021

*Calculatrices authorisées.*
*Les notes personnelles sont permises (cours, TD, exercices, etc.) ainsi que les documents imprimés distribués dans le cadre de ce cours et les notes en ligne sur Moodle.*

**Exercice 1. Polynôme d'interpolation de Lagrange.** *(4 points)*
Le tableau suivant donne l'espérance de vie des habitants de deux pays (source, Google):

| Année | 1990 | 2000 | 2010 |
|---|---|---|---|
| France | 76.60 | 79.06 | 81.66 |
| Côte d'Ivoire | 53.25 | 49.64 | 52.96 |

Utilisez le polynôme d'interpolation de degré 2 pour estimer l'espérance de vie en France et en Côte d'Ivoire en 1995 et en 2005.

**Exercice 2. Approximation d'intégrales** *(4 points)*
Soit $f \in C([-1,1])$. On cherche à approcher l'intégrale:

$$I(f) = \int_{-1}^{1} f(x)dx \tag{1}$$

On appelle $J(f)$ la formule de quadrature définie par

$$J(f) = \alpha f\left(-\frac{1}{2}\right) + \beta f(0) + \gamma f\left(\frac{1}{2}\right) \tag{2}$$

1. Trouver $\alpha$, $\beta$ et $\gamma$ pour que la formule de quadrature $J(f)$ soit de degré 2.

2. Cette formule de quadrature est-elle optimale?

**Exercice 3. Schéma de Crank-Nicolson** *(6 points)*
On s'intéresse à trouver une solution approchée de l'EDO pour $t \in [0,T]$:

$$\begin{cases} y'(t) = f(t, y(t)) \\ y^0 = y(0) \end{cases} \tag{3}$$

On considérera que le problème est bien posé et qu'il existe une solution $y \in C^3([0,T])$. L'intervalle de temps $[0,T]$ est discrétisé uniformément avec $N+1$ temps $(t^n)_{1 \leq n \leq N+1}$. On appelle $\Delta t$ le pas de temps tel que $t^n = (n-1)\Delta t$ pour $n = 1, \ldots, N+1$. On dénote $y^n$ la solution approchée obtenue au temps $t^n$. Le schéma de Crank-Nicolson est défini par

$$\frac{y^{n+1} - y^n}{\Delta t} = \frac{1}{2}\left(f(t^{n+1}, y^{n+1}) + f(t^n, y^n)\right) \tag{4}$$

1. L'erreur de consistance du schéma est définie par

$$E = \frac{y(t+\Delta t) - y(t)}{\Delta t} - \frac{1}{2}\left(f(t+\Delta t, y(t+\Delta t)) + f(t, y(t))\right) \tag{5}$$

1.1. En écrivant des développements de Taylor, montrez qu'il existe $t_1$ et $t_2 \in [t, t+\Delta t]$ tels que

$$E = \frac{\Delta t}{4}\left(y''(t_1) - y''(t_2)\right) \tag{6}$$

1.2. Déduisez-en que le schéma est consistant d'ordre 2, i.e. il existe une constante $C$, indépendante de $\Delta t$ telle que

$$|E| \leq C\Delta t^2 \tag{7}$$

2. On considère maintenant le cas

$$f(t, y(t)) = -\lambda y(t) \tag{8}$$

avec $\lambda \in \mathbb{R}^{+,*}$ constante réelle strictement positive, et $y^0 = y(0) = 5$.

2.1. Quelle est la solution exacte du problème?

2.2. Donnez l'expression de $y^n$ en fonction de $n$ et $\Delta t$.

2.3. Que peut-on dire sur la stabilité du schéma?

**Exercice 4. Méthode de Newton-Raphson et racines de polynômes.** *(6 points)*
Soit $p(x)$ un polynôme de degré $n \geq 2$ à coefficients réels et admettant $n$ racines distinctes réelles $\eta_k$ telles que

$$\eta_n < \eta_{n-1} < \ldots < \eta_2 < \eta_1$$

1. Appliquez la méthode de Newton-Raphson pour l'approximation d'une racine de $p$. On notera $x_k$ le résultat de l'itération $k$.

2. Supposons que le coefficient du terme de plus grand degré $x^n$ est positif:

$$p(x) = a_n x^n + a_{n-1}x^{n-1} + \ldots + a_0 \tag{9}$$

avec $a_n > 0$. On s'intéresse à la situation où la donnée initiale $x_0$ de la méthode de Newton-Raphson est choisie telle que $x_0 > \eta_1$.

2.1. Justifiez que sur pour tout $x \geq \eta_1$: $p(x) \geq 0$, $p'(x) > 0$, $p''(x) > 0$ et $p'''(x) \geq 0$.(*On pourra utiliser le théorème de Rolle à plusieurs reprises.*)

2.2. En utilisant la suite donnée par la méthode de Newton-Raphson, montrez que $x_1 < x_0$.

2.3. A l'aide d'un développement de Taylor Lagrange à l'ordre 2 et de la suite définie par Newton-Raphson, montrez que $\eta_1 < x_1$.

2.4. Montrez que la suite définie par la méthode de Newton-Raphson est strictement décroissante et converge vers la plus grande racine $\eta_1$.

2.5. Montrez que la convergence est quadratique.