INSA INSTITUT NATIONAL DES SCIENCES APPLIQUÉES RENNES

Année universitaire 2020-2021
3ème année GM

Examen MNNL

Projet

Résolution du modèle SIR pour la propagation de maladie

Date de rendu limite: 25 Mai 2021

Instructions: *Vous fournirez un rapport contenant la méthodologie mise en place, les résultats obtenus, ainsi que toute étude complémentaire qui vous semble judicieuse. On ne s'intéressera pas à l'analyse mathématique des schémas employés. Vous fournirez également un dossier contenant les codes qui auront permis l'obtention des résultats présentés.*

Présentation du problème

Il existe de nombreuses possibilités pour tenter de modéliser la propagation d'une épidémie, prenant en compte plus ou moins de paramètres. Un modèle très connu est le modèle *Sains - Infectés - Remis* (SIR), modélisant l'évolution de trois types de population:

- Le groupe de personnes saines $s(t)$: les personnes n'ayant jamais contractées la maladie étant susceptibles de tomber malade à l'instant t.
- Le groupe de personnes infectées $i(t)$: les personnes étant malades, nécessitant des soins, et pouvant transmettre la maladie à l'instant t.
- Le groupe de personnes remises $r(t)$: les personnes ayant eu la maladie, soignées (ne pouvant retomber malade), et qui ne sont plus contagieuses à l'instant t.

Les interactions entre ces différents groupes vont être régies par deux paramètres: le taux d'infection β et le taux de rémission des personnes infectées γ. L'évolution des différents groupes est alors régit par le système d'EDOs suivant:

$$\begin{cases} \dfrac{ds}{dt}(t) = -\beta s(t)i(t) \\ \dfrac{di}{dt}(t) = \beta s(t)i(t) - \gamma i(t) \\ \dfrac{dr}{dt}(t) = \gamma i(t) \end{cases} \tag{1}$$

Les quantités $s(t)$, $i(t)$ et $r(t)$ exprimeront un pourcentage d'une population totale.

Partie 1: Mise en place des schémas Euler implicite et explicite

On va s'intéresser à la résolution du système (1) avec les schémas d'Euler implicite et explicite. Présentez les schémas pour le problème mis en jeu (la non-linéarité sera gérée par la méthode de Newton-Raphson dans le cas implicite). Vous implémenterez ces méthodes avec Matlab et vérifierez l'implémentation avec les données suivantes: 90% de la population est saine et 10% infectée à l'instant initiale $t = 0$ et l'étude est faite sur une durée de $T = 80$ jours avec comme pas de temps $dt = 1$ jour:

$$\begin{cases} s(0) = 0.9 \\ i(0) = 0.1 \\ r(0) = 0 \end{cases} \tag{2}$$

Le test sera effectué avec des coefficients de transmission et rémission $\beta = 0.8$ et $\gamma = 0.1$.

On s'intéressera ensuite au cas de grande infectiosité. On considère une maladie particulièrement virulente, dont la rémission est extrèmement lente. Le taux d'infection est alors élevé et le taux de rémission faible: $\beta = 1$, $\gamma = 0.005$. Le temps pour avoir une éradiction complète de la maladie est donc plus grand et on fera la simulation pour $T = 1200$ jours. On commencera avec un pas de temps de $dt = 1$ jour que l'on essaiera de passer à $dt = 2, 3, 4$ et 5 jours. Qu'observe-t-on et pourquoi?

Partie 2: Vaccination et confinement

Les études faites à partir de maintenant pourront être résolues uniquement avec la méthode d'Euler explicite.
On s'intéressera à la situation où 20% de la population est originellement infectée et 80% est saine:

$$\begin{cases} s(0) = 0.8 \\ i(0) = 0.2 \\ r(0) = 0 \end{cases} \tag{3}$$

avec comme coefficient de transmission $\beta = 0.4$ et un coefficient de rémission $\gamma = 0.1$. Les études seront faites sur une période de 80 jours avec un pas de temps de 1 jour.

<u>Vaccination</u> : On s'intéresse à la situation où un nouveau groupe de catégorie rentre en jeu: les personnes saines qui sont vaccinés et ne peuvent être infectées $v(t)$. On considère qu'à un certain instant t_v, un vaccin est proposé et qu'un certain pourcentage de la population saine $s(t)$ est vaccinée avec un coefficient de vaccination α. Le système devient alors

$$\begin{cases} s'(t) = -\beta s(t)i(t) - \alpha s(t) \\ i'(t) = \beta s(t)i(t) - \gamma i(t) \\ r'(t) = \gamma i(t) \\ v'(t) = \alpha s(t) \end{cases} \tag{4}$$

avec comme condition initiale pour le nouveau groupe $v(0) = 0$. On considérera le cas où le vaccin entre en jeu au $t_v = 6^{eme}$ jour avec 10% de la population saine vaccinée, *i.e.* $\alpha = 0$ si $t < 6$ et $\alpha = 0.1$ si $t \geq 6$.

<u>Confinement</u> : Lorsque la population est confinée, le coefficient de transmission est réduit. On considérera une période de confinement de 10 jours à partir du 5^{eme} jour, durant laquelle le coefficient de transmission passe de 0.4 à 0.1, *i.e.* $\beta = 0.1$ si $t \in [5, 15]$, $\beta = 0.4$ sinon.

Implémentez et simulez les différent scénarios possibles et donnez une interprétation des résultats obtenus.